① 工学研究科　2025年度

② 入試区分

工学研究科博士前期（Ⅰ期）

③ 出題科目

数学

④ 出題の意図

微分方程式と線形代数についての基本的な計算問題および記述問題を出題し，それぞれの分野における基本的な内容が理解できているかについて，下記の通り確認しようとしたものである．

[1] 基本的な微分方程式について理解できているか．
[2] 基本的な線形代数について理解できているか．

【数学】

[1] 次の問い ((1), (2)) に答えよ。

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$y' = x$$

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{x + y}$$

[2] $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ について，次の問い ((1), (2)) に答えよ。

(1) A の固有値を求めよ。

(2) A の固有ベクトルを求めよ。

【数学】

[1] 次の問い ((1), (2)) に答えよ。

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ。

$y' = x$

<u>解答</u>

両辺を x で積分することにより

$$\int dy = \int x dx$$
$$y = \frac{1}{2}x^2 + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

よって，一般解は $y = \frac{1}{2}x^2 + C \quad (C$ は任意定数)

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ。

$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$

<u>解答</u>

$y = ux$ とおく

この両辺を x で微分すると

$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u$

よって　$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$　は　$\frac{du}{dx}x + u = \frac{x-ux}{x+ux}$　となる

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dx}x + u &= \frac{x-ux}{x+ux} \\
&= \frac{1-u}{1+u} \\
x\frac{du}{dx} &= \frac{1-u}{1+u} - u \\
&= \frac{1-u-u-u^2}{1+u} \\
&= -\frac{u^2+2u-1}{u+1} \\
\frac{u+1}{u^2+2u-1}\frac{du}{dx} &= -\frac{1}{x} \quad (u = -1 \pm \sqrt{2} \text{ でないとき}) \\
\frac{2u+2}{u^2+2u-1}\frac{du}{dx} &= -\frac{2}{x}
\end{aligned}$$

両辺を x で積分する

$$
\begin{aligned}
\int \frac{2u+2}{u^2+2u-1}du &= \int -\frac{2}{x}dx \\
\int \frac{\left(u^2+2u-1\right)'}{u^2+2u-1}du &= -2\log|x| + C \\
\log\left|u^2+2u-1\right| &= -2\log|x| + \log e^C \\
&= \log\frac{e^C}{x^2} \\
u^2+2u-1 &= \pm e^C\frac{1}{x^2} \qquad \pm e^C = C \text{ とおくと} \\
u^2+2u-1 &= C\frac{1}{x^2} \\
\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x} - 1 &= \frac{C}{x^2} \\
y^2 + 2xy - x^2 &= C
\end{aligned}
$$

よって，一般解は $y^2 + 2xy - x^2 = C \quad (C$ は任意定数$)$

[2] $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ について，次の問い ((1), (2)) に答えよ。

(1) A の固有値を求めよ。

解答

$$
\begin{aligned}
\det\left\{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \lambda I\right\} &= \det\left\{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (3-\lambda)(2-\lambda) - 2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

特性方程式は $(3-\lambda)(2-\lambda) - 2 = 0$

特性方程式を解いて λ を求める。

$$
\begin{aligned}
6 - 3\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 2 &= 0 \\
\lambda^2 - 5\lambda - 4 &= 0 \\
(\lambda - 1)(\lambda - 4) &= 0 \\
\lambda &= 1, 4
\end{aligned}
$$

(2) A の固有ベクトルを求めよ。

解答

$\lambda = 1$ に対応する固有ベクトル

$$(A - I)x = \left\{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} x$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$
$$2x_1 + x_2 = 0$$
$$2x_1 = -x_2$$

よって，固有ベクトルは　$t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad (t \neq 0)$

$\lambda = 4$ に対応する固有ベクトル

$$(A - I)x = \left\{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} x$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} x$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$
$$-x_1 + x_2 = 0$$
$$x_1 = x_2$$

よって，固有ベクトルは　$t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \neq 0)$