① 工学研究科　2024年度

② 入試区分

工学研究科博士前期（Ⅱ期）

③ 出題科目

数学

④ 出題の意図

微分方程式と線形代数についての基本的な計算問題および記述問題を出題し，それぞれの分野における基本的な内容が理解できているかについて，下記の通り確認しようとしたものである.

[1] 基本的な微分方程式について理解できているか.
[2] 基本的な線形代数について理解できているか.

【数学】

[1] 次の問いに答えよ．

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$y' = x$$

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$y' = \sin x + 1$$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$ において，$y_1 = e^{2x}, y_2 = xe^{2x}$ が基本解になることを示せ．

なお，y_1 と y_2 は一次独立とする．

[2] $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

【数学】

[1] 次の問いに答えよ.

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$y' = x$

解答

両辺を x で積分することにより

$$\int y dx = \int x dx$$
$$y = \frac{1}{2}x^2 + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

よって，微分方程式 $y' = x$ の一般解は $y = \frac{1}{2}x^2 + C \quad (C$ は任意定数)

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$y' = \sin x + 1$

解答

両辺を x で積分することにより

$$\int y' dx = \int (\sin x + 1)\, dx$$
$$y = -\cos x + x + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

よって，微分方程式 $y' = \sin x + 1$ の一般解は $y = -\cos x + x + C \quad (C$ は任意定数)

(3) $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$ において，$y_1 = e^{2x}, y_2 = xe^{2x}$ が基本解になることを示せ.

なお，y_1 と y_2 は一次独立とする.

解答

微分方程式の基本解となることを示すためには

（a）2 つの解が微分方程式を満たすこと

（b）2 つの解が一次独立であること

を示せば良い.

まず，2 つの解が微分方程式を満たすことを示す.

y_1 について　$y_1 = e^{2x}$,　$\frac{dy_1}{dx} = 2e^{2x}$,　$\frac{d^2y_1}{dx^2} = 4e^{2x}$　となるので

$4e^{2x} - 4 \cdot 2e^{2x} + 4e^{2x} = 0$

よって，y_1 は微分方程式の解となる．

y_2 について　$y_2 = xe^{2x}$,　$\dfrac{dy_2}{dx} = e^{2x} + 2xe^{2x}$,　$\dfrac{d^2y_2}{dx^2} = 2e^{2x} + 2e^{2x} + 4xe^{2x} = 4xe^{2x} + 4e^{2x}$　となるので

$4xe^{2x} + 4e^{2x} - 4\left(e^{2x} + 2xe^{2x}\right) + 4xe^{2x} = 0$

よって，y_2 は微分方程式の解となる．

$\therefore y_1$ と y_2 は，微分方程式を満たす．

以上により上記 (a) が示された．

上記 (b) は題意 (y_1 と y_2 が一次独立であるとしている) より明らかである．

したがって，問題に記載の y_1 と y_2 は基本解となる．

[2] $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

解答

まず，固有方程式 $det\begin{pmatrix} 8-\lambda & 1 \\ 4 & 5-\lambda \end{pmatrix} = 0$ を解いて固有値を求める．

$$\begin{aligned} (8-\lambda)(5-\lambda) - 4 &= 0 \\ \lambda^2 - 13\lambda + 36 &= 0 \\ (\lambda-4)(\lambda-9) &= 0 \end{aligned}$$

$\lambda = 9, 4$

次に，それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求める．

$\lambda = 4$ を $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\vec{x} = \vec{0}$ に代入すると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 8-4 & 1 \\ 4 & 5-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$4x_1 + x_2 = 0$$

$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -4t \end{cases}$ $\quad t$ は任意の定数，$t \neq 0$

$\lambda = 9$ を $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\vec{x} = \vec{0}$ に代入すると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 8-9 & 1 \\ 4 & 5-9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$-x_1 + x_2 = 0$$

$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \end{cases}$ $\quad t$ は任意定数 $t \neq 0$

ゆえに

固有値 $\lambda = 4$　　　固有ベクトル $t\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$　 t は任意定数 $t \neq 0$

固有値 $\lambda = 9$　　　固有ベクトル $t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　 t は任意定数 $t \neq 0$